Vu? Pas vu? Réfléchissez!

IAN STEWART

Existe-t-il des zones non éclairées dans un labyrinthe de miroirs?

Angela se trouve dans une pièce aux murs parfaitement réfléchissants. Quelque part dans ce Palais des Glaces, son ami Bruno craque une allumette. Quelles que soient la forme de la pièce et les positions qu'ils y occupent, Angela peut-elle toujours, en regardant autour d'elle, voir l'allumette de Bruno ou une de ses images réfléchies? Ou, ce qui revient au même, pour toute position de l'allumette, la lumière qu'elle émet emplit-elle toute la pièce, sans laisser un seul point dans l'ombre?

Ce problème fut énoncé pour la première fois par Victor Klee, en 1969, mais l'on pense que ses origines sont plus anciennes : elles remonteraient au moins à Ernst Straus, dans les années 1950. Il est apparu sous plusieurs variantes. La chambre peut être à deux ou à trois dimensions (dans ce dernier cas, sol et plafond sont aussi des miroirs). Elle peut avoir des murs plans, donc être un polygone en dimension 2 ou un polyèdre en dimension 3, ou «incurvés».

Dans toutes les versions, l'idéalisation standard remplace les yeux d'Angela et la flamme de l'allumette par deux points. Ces points ne doivent pas être sur les murs eux-mêmes et, de plus, sont tous deux conçus comme transparents.

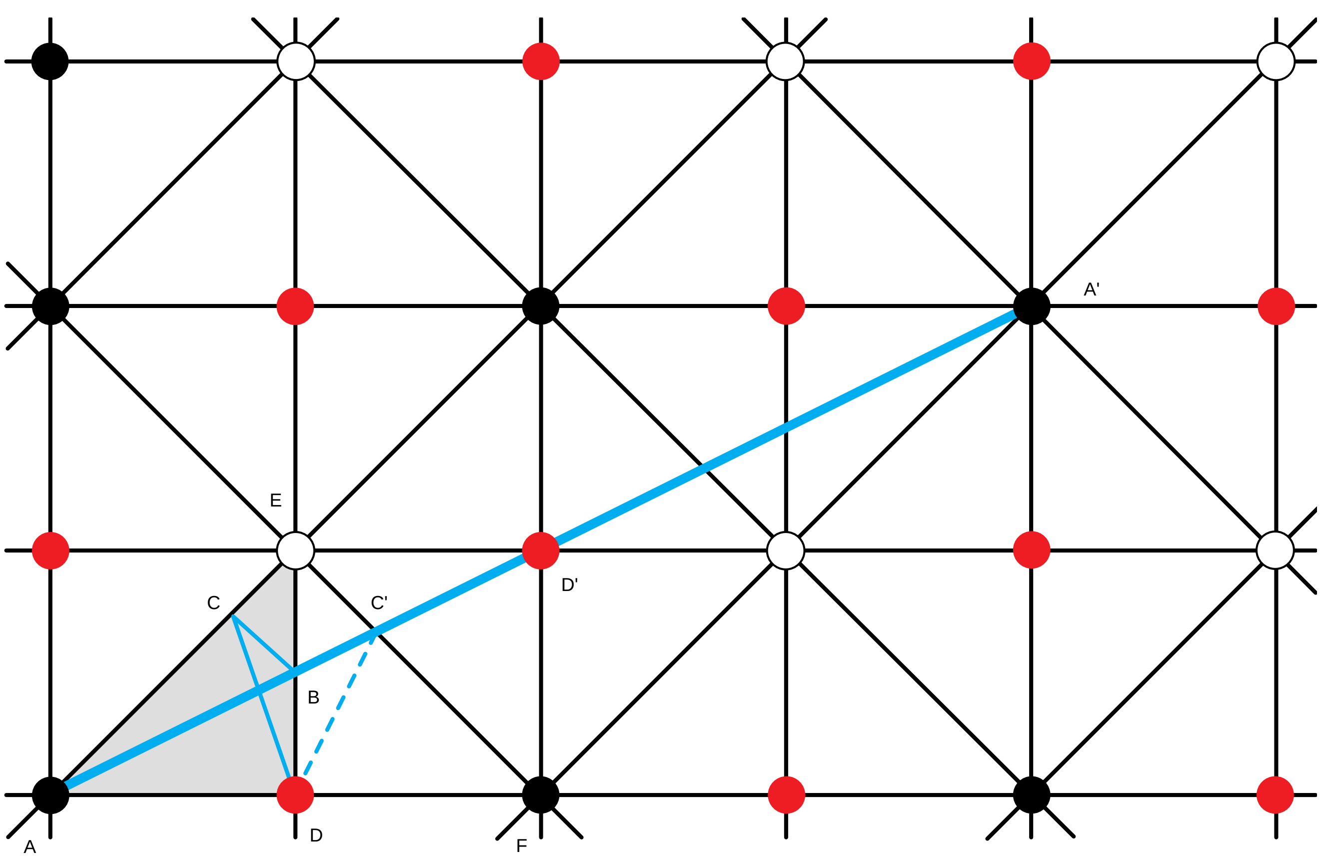
Sur chaque mur, la loi de la réflexion s'énonce classiquement ainsi : «l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion». Partout où ces angles sont mal définis (aux sommets, sur les arêtes...), on supposera que les rayons lumineux incidents sont absorbés et ne vont pas au-delà.

Dans le cas des polygones plans, la réponse à la question fut publiée par George Tokarsky, dans le numéro de décembre 1995 de la revue *American Mathematical Monthly* (vol. 102, n° 10). L'élégante démonstration de G. Tokarsky utilise un «artifice de réflexion» et, comme toutes les mathématiques à leur meilleur niveau, est étonnamment simple.

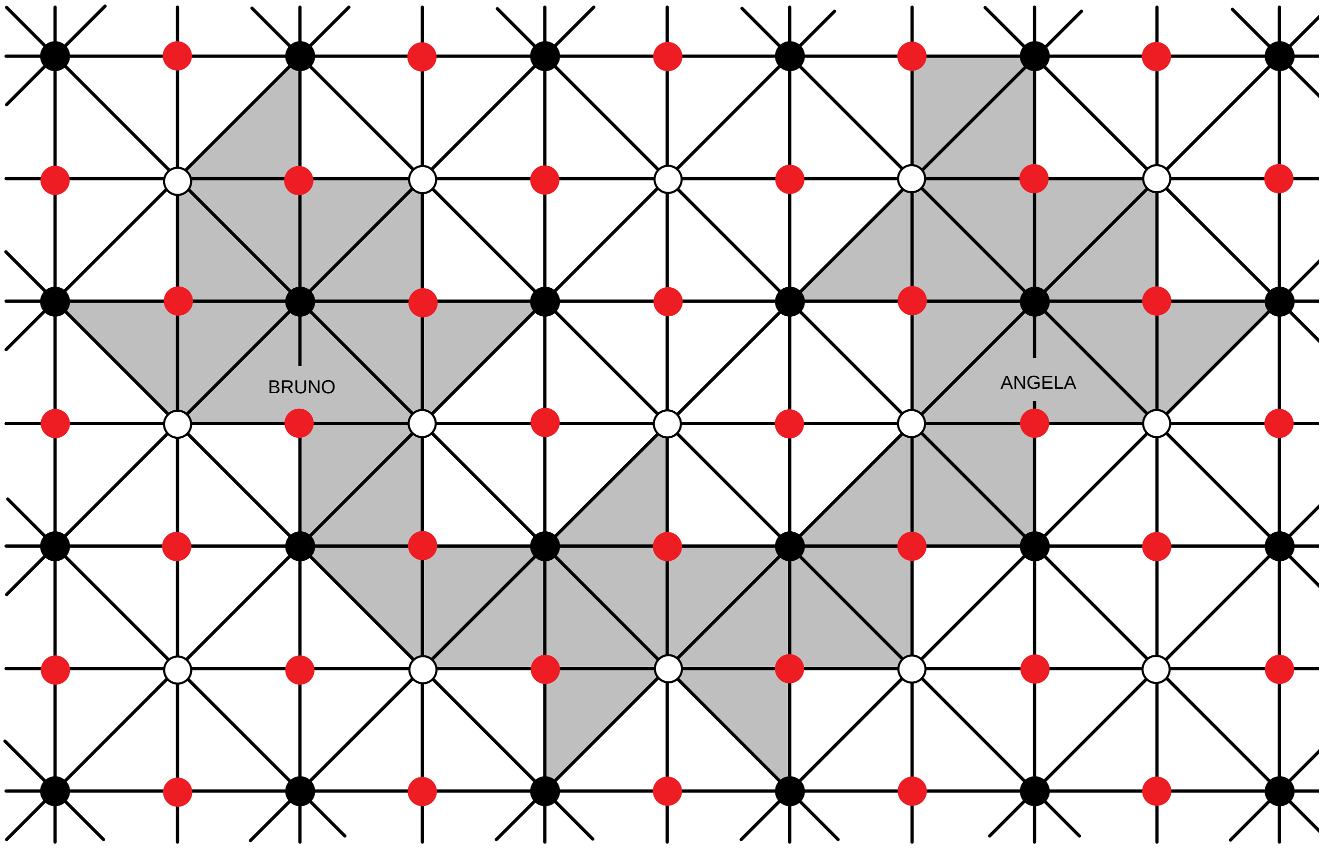
FIAT LUX

Le raisonnement de base s'appuie sur un triangle rectangle isocèle (un demi-carré, limité par une diagonale). Un tel triangle, marqué AED *(voir la figure 1)*, peut être «déplié» en un réseau régulier à mailles carrées par des réflexions répétées par rapport à ses trois côtés.

Le réseau est tout d'abord utilisé pour prouver un fait clé : si une allumette est placée à l'un des sommets à 45 degrés



1. Le treillis engendré par réflexions d'un triangle rectangle isocèle apporte la clé de la compréhension des réflexions à l'intérieur du triangle supposé réfléchissant AED. Un rayon lumineux émanant de A et subissant des réflexions sur les murs du triangle peut être «déplié» en un segment de droite sur le treillis. Le point où ce segment s'achève révèle le destin du rayon réel original.



2. Cette chambre réfléchissante, construite à partir d'un treillis à base d'un triangle rectangle isocèle, est telle qu'aucun rayon lumineux issu de Bruno n'atteint Angela, après réflexions éventuelles.

du triangle initial (marqué A), alors tout rayon lumineux qui en émane ne reviendra jamais à l'allumette. Pour voir cela, observons d'abord que tout rayon émis, tel ABCD, se déplie de la même manière que le triangle. Ainsi le trajet BCD se réfléchit sur le mur ED, pour donner BC'D de l'autre côté du mur. Puis, dans une réflexion par rapport à EF, C'D se déplie en C'D', de sorte que ABCD se déplie en ABC'D'. Notons qu'ici le trajet s'achève en D, car c'est un sommet du triangle ; le point déplié D' est un des sommets du réseau. La loi de la réflexion implique que ABC'D' est une ligne droite, ce qui va s'avérer essentiel pour la suite.

J'ai colorié les trois sommets du triangle : A en noir, E en blanc et, à l'angle droit, D en rouge. Par dépliage du triangle, il s'ensuit que tout sommet du réseau est alors colorié. Je me propose de prouver que si un trajet lumineux parti de A revient en A, alors, en fait, il doit d'abord passer par un point rouge ou blanc, où il est absorbé.

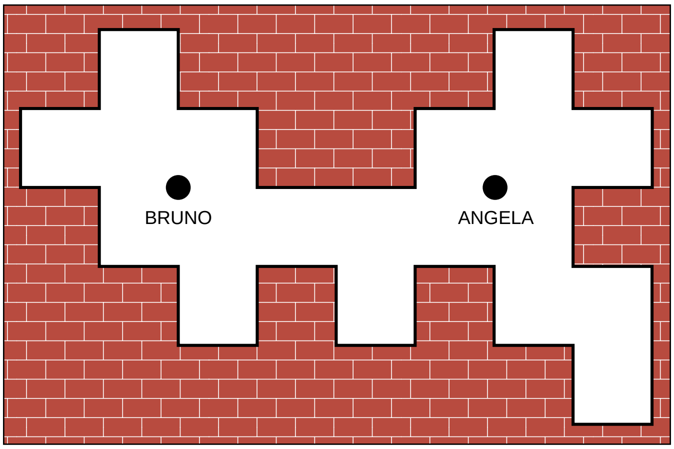
Imaginons donc un trajet joignant A à A. Par dépliage, il devient un segment de droite joignant A à un point noir A' du réseau. Or de tels points noirs sont espacés d'un nombre pair de pas du réseau suivant les directions horizontale et verticale : les «coordonnées» de A', si A est pris pour origine, sont donc deux nombres

Réactions

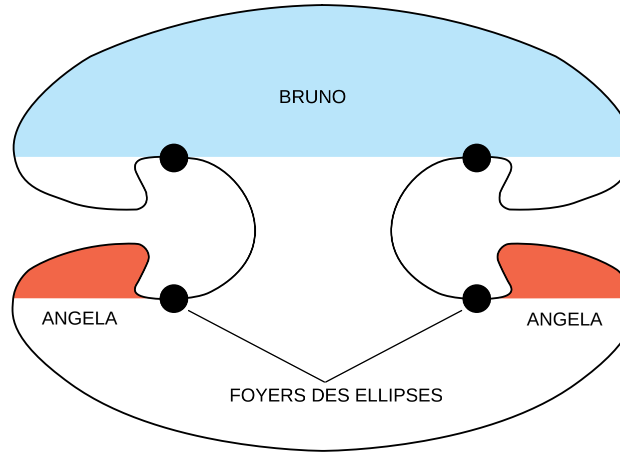
L'article Trop Monopoly pour être honnête (*Pour la Science* n° 224, juin 1996) a engendré un courrier record. La plupart des lecteurs font remarquer que l'analyse ignorait de nombreuses propriétés du véritable jeu, singulièrement la case «Allez en prison», mais aussi celles «Caisse de communauté» et «Chance». Certains lecteurs ont même affirmé que je ne connaissais pas les règles du jeu, alors que d'autres déduisaient, à juste raison, que j'avais utilisé quelques hypothèses aussi simplificatrices que non explicites. Un lecteur s'est demandé si l'article n'était pas un poisson d'avril : non, c'était un véritable article!

Quelques lecteurs proposèrent l'analyse complète du jeu. Je veux particulièrement remercier Stephen Abbott, de Northfield, Minnesota ; William Butler, junior de Portsmouth, Rhode Island ; Thomas Fridell, de Maple Valley, Washington ; le comte A. Paddon, de Maryland Heights, Missouri ; et David Weiblen, de Reston, Virginie. J'ai beaucoup appris d'eux ; à tel point que j'ai l'intention de mentionner leurs résultats, et quelques autres qui me sont venus à l'esprit dans un article entier.

En fait, la case «Allez en prison» introduit en définitive une distribution de probabilité non uniforme. La case «Prison» elle-même est la plus fréquentée, avec une probabilité de 5,89... pour cent, comparée avec la valeur «équidistribuée» de 2,5 pour cent (ou 2,44... pour cent si «Simple visite» et «Prison» sont distinguées, ce qui semble raisonnable). La case la plus probable après cela est «Avenue Henri-Martin», avec 3,18... pour cent. La case la moins probable est la troisième case «Chance» à partir de la case «Départ», avec 0,871... pour cent, si l'on exclut «Allez en prison», qui, à vrai dire, n'est pas visitée du tout, puisqu'elle vous envoie directement en prison!



3. Ces blocs carrés constituent une autre chambre réfléchissante qui protège Angela de tout rayon issu de Bruno.



4. Ces arcs d'ellipses limitent une pièce comportant des zones en rouge où Angela ne reçoit aucun rayon issu de Bruno.

pairs. Si ces coordonnées ne sont pas toutes deux des multiples de 4, une au moins des coordonnées du milieu de AA' est un entier impair, et donc ce milieu est un point rouge ou blanc du réseau. Si les deux coordonnées de A' sont des multiples de 4, on remplace A' par le milieu A" de AA'. Après un nombre fini de tels remplacements, on arrive à une coordonnée (au moins) impaire, et le résultat en découle. Si, par exemple, les coordonnées de A' sont (48 ; 28), celles de A" seront (24 ; 14), celles de A"' (12 ; 7), qui sera donc un point rouge ou blanc.

Ainsi tout trajet déplié joignant A à un point noir du réseau frappe d'abord nécessairement un point rouge ou blanc et, par conséquent, le trajet réel doit frapper un des deux autres sommets avant de revenir vers A.

Nous pouvons construire des pièces polygonales en assemblant verticalement, horizontalement ou diagonalement des parties de ce réseau triangulaire *(voir la figure 2)*. Supposons qu'un rayon de lumière parte de Bruno et, après diverses réflexions sur les murs de la pièce, atteigne Angela et que, tous deux, soient placés sur des points noirs. Nous pouvons alors replier ce rayon dans un unique triangle générateur, mais nous avons établi que tout trajet joignant deux points noirs devait frapper aussi un point rouge ou blanc, de sorte qu'en dépliant de nouveau, le rayon initial devrait aussi frapper un point rouge ou blanc. Supposons à présent que notre construction satisfasse les trois conditions suivantes

• Les deux points noirs représentant Angela et Bruno sont à l'intérieur de la pièce.

• Aucun point rouge ou blanc n'est intérieur.

• Tout point rouge ou blanc sur les limites de la pièce est sur un sommet.

Alors tout rayon frappant un point rouge ou blanc frappe un sommet et est donc absorbé, de sorte qu'un tel rayon lumineux n'existe pas.

Si vous essayez de construire de telles pièces, vous verrez que cela exige une dose minimale d'ingéniosité. Par exemple, vous devrez ajouter des triangles supplémentaires pour introduire des courbures additionnelles dans la frontière ; à moins d'être très attentif, ces torsions peuvent introduire de nouveaux points blancs ou rouges à l'intérieur du réseau et violer ainsi la seconde condition.

La pièce de l'illustration est construite avec 39 copies par réflexion d'un triangle rectangle isocèle : l'article de G. Tokarsky en contient une de 29 triangles composants. Sauriez-vous la retrouver ? Ou en trouver d'autres ? G. Tokarsky a aussi mis au point une théorie similaire pour les pièces s'obtenant en dépliant un rectangle ou en utilisant des triangles ayant d'autres formes, de même que des pièces tridimensionnelles obtenues à partir de principes similaires.

Une surface sombre existe-t-elle?

Ces exemples montrent que, dans une chambre polygonale, il peut y avoir des points où une allumette enflammée n'éclaire pas tous les points de la pièce. Tout ce que nous avons prouvé, cependant, c'est qu'un point au moins n'est pas éclairé. Est-il possible alors que toute une région d'aire non nulle soit sans aucun point éclairé ? Le problème est nettement plus difficile. Tout ce que nous savons, c'est que les rayons partant de Bruno peuvent passer aussi près que l'on veut d'Angela ; nous avons juste prouvé qu'ils ne pouvaient pas frapper sa «tête».

La réponse concernant les pièces polygonales semble inconnue, mais avec un collaborateur, Roger Penrose, a montré, en 1958, que si une pièce a des frontières courbes, des régions totalement non éclairées peuvent exister. Par exemple, vous vous souvenez qu'une ellipse possède deux points particuliers appelés foyers. On prouve que tout rayon lumineux passant entre les foyers et qui se réfléchit sur la courbe recoupe l'axe joignant les foyers avant de frapper de nouveau la courbe. En exploitant cette propriété, on peut facilement vérifier qu'une pièce limitée par deux moitiés d'une ellipse *(voir la figure 4)* a des régions totalement non illuminées. Tout particulièrement, des rayons issus d'un point de la région en bleu (Bruno) ne peuvent pénétrer les régions en rose (Angela).

Il y a beaucoup de problèmes similaires, certains résolus, d'autres non. Vous pourrez en trouver une sélection dans *Unsolved Problems in Geometry,* de Hallard Croft, Kenneth Falconer et Richard Guy (Springer-Verlag, 1991) ainsi que dans *Old and New Problems in Plane Geometry and Number Theory*, de Victor Klee et Stan Wagon (Association Mathématique Américaine, 1991). Par exemple, Jeffrey Rauch, de l'Université du Michigan, a montré qu'il existe une pièce à murs curvilignes «réguliers» en tous points, sauf un, qui requiert un nombre infini d'allumettes pour être entièrement éclairée.

J. Rauch a également prouvé que, pour tout nombre fini n d'allumettes, il existe une pièce à frontière curviligne régulière qu'on ne peut entièrement éclairer avec n allumettes. Janos Pach, du City College de New York, a posé cette élégante interrogation : si l'on craque une allumette dans une forêt d'arbres parfaitement réfléchissants, sa lumière sera-t-elle visible de l'orée ? Les arbres peuvent, par exemple, être schématisés par des cercles si le problème est envisagé dans le plan. Personne ne connaît la réponse !